

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

Точечные статистические оценки

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине "Математическая статистика"

Составители: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2020

ВВЕДЕНИЕ

Цель практического занятия – изучить свойства статистических оценок и способы точечного оценивания параметров нормального распределения.

ПРИМЕР 1. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором получены следующие результаты: 8, 9, 11, 12. Найти несмещенную точечную оценку математического ожидания, смещенную и несмещенную точечные оценки генеральной дисперсии.

РЕШЕНИЕ.

Выборочное среднее является несмещенной точечной оценкой математического ожидания (генеральной средней) при любом объеме выборки и определяется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{8 + 9 + 11 + 12}{4} = 10.$$

Выборочная дисперсия является смещенной точечной оценкой генеральной дисперсии при объеме выборки менее 30 и определяется по формуле:

$$\begin{aligned} D^*(X) &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \\ &= \frac{(8 - 10)^2 + (9 - 10)^2 + (11 - 10)^2 + (12 - 10)^2}{4} = 2,5. \end{aligned}$$

«Исправленная» выборочная дисперсия является несмещенной точечной оценкой генеральной дисперсии при объеме выборки менее 30 и определяется по формулам:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \\ &= \frac{(8 - 10)^2 + (9 - 10)^2 + (11 - 10)^2 + (12 - 10)^2}{4 - 1} = 3,33 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^*(x) = \frac{4}{4-1} 2,5 = 3,33.$$

ПРИМЕР 2. Изучается непрерывная случайная величина X – температура воздуха, которая имеет нормальный закон распределения. Проведено 50 измерений. Составлено статистическое распределение частот (перечень вариантов и их частот):

$x_i, ^\circ\text{C}$	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти точечные оценки генеральной средней (математического ожидания), генеральной дисперсии и среднего квадратического отклонения. Какие точечные оценки являются несмещенными и смещенными?

РЕШЕНИЕ.

Несмещенной точечной оценкой математического ожидания (генеральной средней) является выборочное среднее при любом объеме выборки. Если задано статистическое распределение частот, то выборочное среднее определяют по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i n_i}{n} = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{50} = 2,0^\circ\text{C}.$$

Несмещенной точечной оценкой генеральной дисперсии при объеме выборки более 30 является выборочная дисперсия, которую можно определить по формуле:

$$\begin{aligned} D^*(X) &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \\ &= \frac{(1-2)^2 20 + (2-2)^2 15 + (3-2)^2 10 + (4-2)^2 5}{50} = \\ &= 1,0 (^\circ\text{C})^2. \end{aligned}$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma^*(X)$ является смещенной оценкой генерального среднего квадратического отклонения:

$$\sigma^*(X) = \sqrt{D^*(X)} = \sqrt{1,0} = 1,0^\circ\text{C}.$$

Несмещенную оценку можно получить по формуле:

$$\sigma_{\text{несм.}} = k \cdot \sigma^*(X) = 1,005 \cdot 1,0 = 1,005^\circ\text{C}.$$

где k – поправочный коэффициент, значения которого приведены в табл. 5 (см. лекцию №2) в зависимости от объема выборки n .

ЗАДАЧИ

1. По выборке объема $n=41$ найдена смещенная оценка $D^*(X)=3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.
2. Исследуется случайная величина X – изменение выработки на одного рабочего механического цеха в отчетном году по сравнению с предыдущим. Получены данные по 100 рабочим цеха:

Выработка, %	94- 100	100- 106	106- 112	112- 118	118- 124	124- 130	130- 136	136- 142
Количество рабочих	3	7	11	20	28	19	10	2

Найти точечные оценки математического ожидания, генеральной дисперсии и среднего квадратического отклонения. Указание: найти середины интервала и принять их в качестве вариантов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте основную задачу теории статистических оценок.
2. Какая статистическая оценка называется точечной?
3. Сформулируйте требования к точечным статистическим оценкам.
4. Перечислите наилучшие точечные оценки математического ожидания, генеральной дисперсии и генерального среднего квадратического отклонения в зависимости от объема выборки.